Integrals racionals amb arrels reals

Campana de Gauss

www.campanadegauss.cat

demidovitx@gmail.com

1. **Calcula:** $\displaystyle \int \boldsymbol{\frac{5x-1}{x^2+x+2}dx}$

   Aquesta integral correspon a una funció racional, on el grau del polinomi denominador és major que el grau del polinomi del numerador. Llavors, el pas immediat és conèixer quines són es arrels del polinomi (x^2-x+2)

$$\left(x^2-x+2\right)=0 \tag{1}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1+\pm\sqrt{1+8}}{2} \tag{2}$$

   Llavors,

$$\left(x^2-x+2\right)=(x-2)\,(x+1) \tag{3}$$

   A continuació es decomposa la fracció donada en una suma de fraccions simples de la següent manera:

$$\frac{5x-1}{x^2+x+2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)} \tag{4}$$

   La determinació dels coeficients es realitza de la següent manera:

$$\frac{5x-1}{x^2+x+2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}=\frac{A\,(x+1)+B\,(x-2)}{(x-2)\,(x+1)} \tag{5}$$

   Ens queda com:

$$5x - 1 = A\,(x+1) + B\,(x-2) \tag{6}$$

Ara imposem les condicions a x del valor de les seves arrels per tal de trobar el valor dels coeficients A i B

$$\left.\begin{array}{c} 5 = A + B \\ (A+2B) = -1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} B = 5 - A \\ A - 10 + 2A = -1 \end{array}\right\} A = 3, B = 2 \tag{7}$$

Substituïnt els coeficients pels seus valors:

$$\begin{aligned} \boxed{\int \frac{5x-1}{x^2+x+2}dx} &= \int \frac{A}{(x-2)}dx + \int \frac{B}{(x+1)}dx = \\ &= \int \frac{5x-1}{x^2+x+2}dx = \int \frac{3}{(x-2)}dx + \int \frac{2}{(x+1)}dx = \\ &= 3\int \frac{1}{(x-2)}dx + 2\int \frac{1}{(x+1)}dx = \\ &= \boxed{3\ln|x-2| + 2\ln|x+1| + k} \end{aligned} \tag{8}$$