Integrals racionals amb arrels complexes

Campana de Gauss

www.campanadegauss.cat

demidovitx@gmail.com

1. **Calcula:** $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{3x+1}}{\boldsymbol{x^3-x^2+x-1}}\boldsymbol{dx}$

   El polinomi $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ té $x = 1$ com arrel simple i $x = \pm i$ com arrel complexa, on la seva descomposició és la següent:

   $$Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1) \tag{1}$$

   A continuació es descomposa la fracció donada com a suma de fraccions simples de la forma:

   $$\frac{3x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \tag{2}$$

   A continuació es decomposa la fracció donada en una suma de fraccions simples de la següent manera:

   $$\frac{3x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+1)} \tag{3}$$

   Ara imposem les condicions a x del valor de les seves arrels per tal de trobar el valor dels coeficients A, B i C

   Substituïnt els coeficients pels seus valors trobem les següents equacions:

   $$0 = A + B \tag{4}$$
   $$3 = C - B \tag{5}$$
   $$1 = A - C \tag{6}$$

   Resolent les anteriors equacions obtenim els següents valors pels coeficients: $A = 2$; $B = -2$ i $C = 1$

   Finalment, susbtituïnt els coeficients pels seus valors tenim:

$$\begin{aligned}
\boxed{\int \frac{3x+1}{x^3-x^2+x-1}dx} &= \int \frac{A}{(x-1)}dx + \int \frac{Bx+C}{(x^2+1)}dx = \\
&= \int \frac{2}{(x-1)}dx + \int \frac{-2x+1}{(x^2+1)}dx = \\
&= 2\int \frac{1}{(x-1)}dx - \int \frac{2x}{(x^2+1)}dx + \int \frac{1}{(x^2+1)}dx = \\
&= \boxed{2\ln|x-1| - \ln|x^2+1| + \arctan|x| + k}
\end{aligned} \tag{7}$$